

# Informatique Fondamentale

L1 2025-2026

## Travaux Dirigés - langages et automates -

Dans la suite le mot vide (seul mot de longueur 0 sera noté  $\epsilon$ ). Par convention l'opération  $*$  (étoile de Kleen) est prioritaire, puis vient la concaténation, et enfin l'union.

Exemple :

$$ba^*|b = (b(a^*))|b$$

### Exercice 1. Mots

On pose  $w = aba$  et  $m = ccbac$   $v = \epsilon$ .

1. Quel alphabet ces mots utilisent-ils ?
2. Quel est la longueur de  $w$  ? Et de  $m$  ?
3. Donner  $wm$  : la concaténation de  $w$  suivit de  $m$ .
4. Donner  $mw$ ,  $wmw$ ,  $vw$  et  $mvm$ .
5. Soient  $z$  et  $y$  deux mots de longueurs respectives  $k$  et  $j$ . Quelle est la longueur du mot  $zy$  ?
6. Le **miroir** d'un mot est obtenu en inversant l'ordre de ses lettres. Pour un mot  $w$ ,  $w = w_1w_2w_3w_4 \dots w_{n-1}w_n$  son miroir est  $w_nw_{n-1} \dots w_4w_3w_2w_1$  (on retourne le mot).

Exemple : le miroir de **abbca** est **acbba**.

On pose  $w' =$  le miroir de  $w$  et  $m'$  le miroir de  $m$ , donner  $m'$ , donner  $w'$ , donner le miroir de  $wm$  et donner  $m'w'$ .

7. Pour deux mots quelconques  $z$  et  $y$  et leurs miroirs  $z'$  et  $y'$ , donner le miroir de leur concaténation  $(zy)'$  en fonction de  $z'$  et  $y'$ .

### Exercice 2. Concatenation

On pose  $A = \{ab, a\}$  et  $B = \{\epsilon, bb, b\}$

1. Énumérer les éléments de l'ensemble  $AB$  (ou  $A \circ B$ , l'ensemble  $A$  concaténé avec l'ensemble  $B$ )
2. Énumérer les éléments de  $A^2 = AA$
3. On pose  $C = \emptyset$  énumérer les éléments de  $CA$ .
4. Soient  $G$  et  $H$  des langage finis tels que  $|G| = g$  et  $|H| = h$ , donner  $|GH|$  en fonction de  $g$  et  $h$ .

### Exercice 3. Étoile de Kleen

1. Soit  $A$  un langage. Donner la définition de  $A^*$ .
2. On pose  $A = \{ab, a\}$ . Donner l'ensemble des mots de  $A^*$  de longueur inférieure ou égale à 4

### Exercice 4. Expression rationnelle

Donner tous les mots de taille 0, 1, 2, 3 et 4 de chacun des langages rationnels suivants :

1.  $(a|b)(c|b)$
2.  $(a|ba)^*$
3.  $a(aa|b(ab)^*a)^*a$

### Exercice 5.

1. Concevoir un automate reconnaissant un seul mot : coucou.
2. Concevoir un automate reconnaissant le mot coucou mais aussi n'importe quel nombre de cou qui se suivent : cou, coucou, coucoucou.

### Exercice 6.

Pour chacun des langages suivants, construire un automate (fini) qui reconnait ce langage. Pour chaque automate construit indiquer s'il est déterministe ou non déterministe.

1. L'ensemble des mots sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  dont le dernier symbole est 0.
2. L'ensemble des mots sur  $\{0, 1\}$  qui commencent et finissent par 1.
3. L'ensemble des mots sur  $\{a, b\}$  qui contiennent au moins une fois le motif **ab** et au moins une fois le motif **ba**.

### Exercice 7.

En autorisant des transitions étiquetées par le mot vide, donner un automate qui reconnait les langages suivants.

1.  $(abc|cab)$

2.  $(ab|a)(b|a)$

3.  $(ab|c)^*$

**Exercice 8.**

À partir d'un automate  $A$  qui reconnaît le langage  $L$ , comment peut-on transformer  $A$  pour qu'il reconnaisse le langage miroir de  $L$  (tous les mots de  $L$  retournés).

**Exercice 9.**

Dessinez un automate déterministe qui reconnaît le langage  $((ab|b)(a|b))^*$