Informatique Fondamentale
Travaux Dirigés 2

Exercice 1. *En compréhension*

Énumérer, si possible, les éléments des ensembles suivants. (ici $<$ et $\leqslant$ sont les inégalitées sur $\mathbb{R}$) (pour un ensemble décrit par des propositions on peut utiliser $\{x : \dots\}$ ou $\{x/\dots\}$

1. $\{x/(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 16) \wedge (3 \leqslant x) \wedge (x \text{ est pair})\}$
2. $\{y/(y \in \mathbb{N}) \wedge (y < 16) \wedge \neg(3 \leqslant y))\}$
3. $\{\alpha/(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < 16) \wedge \neg(3 \leqslant \alpha))\}$
4. $\{x : (x \in \mathbb{Z}) \wedge \neg(x < 16) \wedge \neg(3 \leqslant x))\}$

Exercice 2. *Cardinaux*

On pose $A = \{2, 3, 4, 5\}$. Lorsqu'un ensemble est fini on appelle le nombre de ses éléments le **cardinal** de cet ensemble. Par exemple le cardinal de A est 4. et on note $|A| = 4$

1. Si $A \subset B$ et que $|B| = 19$ quelle est la valeur $|B\backslash A|$?
2. Soient C et D deux ensemble tels que $C \subset D$ quelle est la valeur de $|D\backslash A|$?
3. Énumérer l'ensemble des parties de A.
4. Pour un ensemble de cardinal n. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties de A ?

Exercice 3. *Égalité*

Les ensembles suivants sont-ils égaux ? (les opérations sont considérée dans $\mathbb{R}$)

- $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$
- $\{2, 3\}$
- $\{3, 6\}$

(Indice) L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a deux solutions, $x = 2$ et $x = 3$.

Exercice 4. *Si simple ?*

Quels sont les ensembles $A \cup A$, $A \cup \emptyset$, $A \cap A$, $A \cap \emptyset$?

Exercice 5. *Égalité 2*

Expliquez pourquoi : $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$.

Indice : $|\cdot|$ représente la valeur absolue d'un nombre réel. Exemple : $|-6| = 6$ $|6| = 6$

Exercice 6. *Dans un treillis*

On se place dans $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les nombres entiers positifs $x \leqslant 20$, et on pose

- $A = \{x : x \text{ is a prime number}\}$,
- $B = \{x : x \text{ is odd number}\}$.

trouver les ensembles $(A \cup B)^{\complement}$ et $A^{\complement} \cap B^{\complement}$.

Exercice 7. *Nouvelle opération ?*

Pour deux ensembles A et B on définit l'opération $\triangleright$ de la façon suivante $A \triangleright B := \Big\{x : \neg\Big(\ (x \in A) \Rightarrow (x \in B)\Big)\Big\}$

On pose $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$ et $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

1. Énumérer les éléments de $A \triangleright B$
2. Énumérer les éléments de $B \triangleright A$
3. Sous quel autre nom est connue l'opération $\triangleright$?

Exercice 8. *Ensemble bizzare*

Énumérer, si possible, les éléments des ensembles suivants. (ici $<$ et $\leqslant$ sont les inégalitées sur $\mathbb{R}$) (pour un ensemble décrit par des propositions on peut utiliser $\{x : \dots\}$ ou $\{x/\dots\}$

1. $\{5 : (5 \in \mathbb{N}) \wedge \neg(5 \in \mathbb{N})\}$ (ici le symbole 5 joue le role de la variable)
2. $\{x/(x \in \mathbb{N}) \vee \neg(x \in \mathbb{N})\}$
3. $\{x/\ (x \text{ est une lettre de l'alphabet latin}) \vee ((x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leqslant 10))\}$
4. $\{x : \big((x \text{ est une lettre de l'alphabet latin}) \quad \vee (x \in \mathbb{N})\big) \wedge (x \leqslant 10)\}$

5. $\{x/(x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Z})\}$

Exercice 9. *Tous*

On pose $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

1. Quels sont les sous-ensembles de A de taille 3.
2. Soit B un ensemble de cardinal n. Combien de sous-ensembles de taille k B possède-t-il ?

Exercice 10. *Démonstration*

Pour deux ensembles G et H on dit que $G = H$ si $G \subset H$ et $H \subset G$. Soit E un ensemble et soient A,B et C trois sous-ensembles de E. Montrer en utilisant les lois propositionnelles que

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercice 11. *Produit 1*

Soit $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Écrivez les éléments de :

1. $X \times Y$
2. $Y \times X$
3. X^2

Exercice 12. *Produit 2*

Si $X \times Y = Y \times X$, que pouvons-nous dire des ensembles X et Y ?

Exercice 13. *Partitions*

Listez toutes les partitions de l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$.

Exercice 14. *Ensemble des puissances*

L'ensemble des puissances de 2 est-il dénombrable ? Pourquoi ?

Exercice 15. *Union de deux ensembles dénombrables*

Montrer que l'union de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 16. *Paradoxe*

Considérer l'ensemble :

$$C = \{\text{catalogues qui ne se présentent pas eux-mêmes}\}$$

Est-ce que l'ensemble C est un élément de lui-même ?