Relations d'ordre

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

Relation

Relation

- **Une relation** est un ensemble de paires ordonnées.

Par exemple :

- Relations en mathématiques : $\geqslant$, $\neq$, ...
- Relations dans les langues naturelles : l'instructeur de, la capitale de, ...
- $[\text{la capitale de}] =$ $\{(\text{USA, Washington}), (\text{Chine, Pékin}), (\text{France, Paris}), ...\}$ $= \{(x, y) : y \text{ est la capitale de } x\}$
- $[\text{invité}] = \{(\text{Andy, Billy}), (\text{Cindy, Danny}), (\text{Emily, Flori}), ...\}$ $= \{(x, y) : x \text{ a invité } y\}$

Relation binaire

Relation binaire

Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de produit $E \times E$.
On note $x \ \mathcal{R} \ y$ pour signifier que $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $x \ \not\mathcal{R} \ y$ pour signifier que $(x, y) \notin \mathcal{R}$.

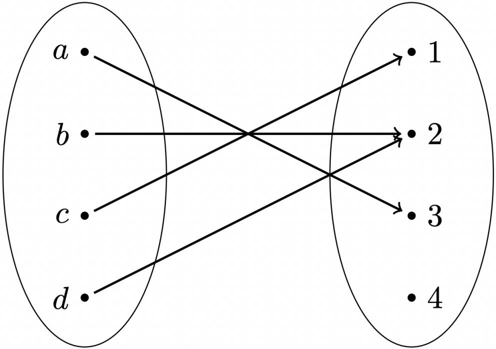
Relation

Une relation R est une relation de A vers B si et seulement si R est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$, écrit comme $R \subseteq A \times B$.

Par exemple :

a. [the capital city of] $\subseteq \{x : x \text{ is a country}\} \times \{y : y \text{ is a city}\}$
b. [the mother of] $\subseteq \{x : x \text{ is a human}\} \times \{y : y \text{ is a human}\}$

Nous pouvons utiliser un diagramme pour illustrer une relation :



Domaine et Image

Domaine et Image

A et B sont respectivement le **domaine et l'image** de R si et seulement si $A \times B$ est le *plus petit* produit cartésien dont R est un sous-ensemble.

Par exemple :

- Soit $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$, alors : $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$, $Im(R) = \{a, b\}$

Discussion 1/2

? Pourquoi les définitions suivantes sont-elles problématiques ? Donnez des contre-exemples.

a. A et B sont le domaine et l'image de R si et seulement si $R = A \times B$.

Discussion 1/2

? Pourquoi les définitions suivantes sont-elles problématiques ? Donnez des contre-exemples.

a. A et B sont le domaine et l'image de R si et seulement si $R = A \times B$.

a. Incorrecte car elle implique que toutes les paires possibles du produit cartésien $A \times B$ sont présentes dans la relation R, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour une relation.
Contre-exemple : Soit $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$. Le produit cartésien $A \times B$ est $\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$. Si nous avons une relation $R = \{(1, a), (2, b)\}$, alors R ne représente pas $A \times B$ car il manque les paires $(1, b)$ et $(2, a)$, bien que le domaine soit A et l'image soit B.

Discussion 1/2

? Pourquoi les définitions suivantes sont-elles problématiques ? Donnez des contre-exemples.

b. A et B sont le domaine et l'image de R si et seulement si $R \subseteq A \times B$.

Discussion 1/2

? Pourquoi les définitions suivantes sont-elles problématiques ? Donnez des contre-exemples.

b. A et B sont le domaine et l'image de R si et seulement si $R \subseteq A \times B$.

b. Cette définition est trop générale. Elle ne garantit pas que chaque élément de A est relié à un élément de B et que chaque élément de B est l'image d'un élément de A.
Contre-exemple : Considérez $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c\}$ avec la relation $R = \{(1, a), (2, b)\}$. Ici, R est bien un sous-ensemble de $A \times B$ mais le domaine de R est réduit à $\{1, 2\}$ et non A, et l'image est $\{a, b\}$ et non B.

Propriétés des relations

On dit que R est :

- réflexive quand $\forall x \in E, x \mathrel{R} x$,
- irréflexive quand $\forall x \in E, x \not\mathrel{R} x$,
- symétrique quand $\forall x, y \in E, x \mathrel{R} y \Rightarrow y \mathrel{R} x$,
- antisymétrique quand $\forall x, y \in E, x \mathrel{R} y$ et $y \mathrel{R} x \Rightarrow x = y$,
- transitive quand $\forall x, y, z \in E, x \mathrel{R} y$ et $y \mathrel{R} z \Rightarrow x \mathrel{R} z$.

Relation d'équivalence

Relation d'équivalence

Une relation binaire est un relation d'équivalence quand elle est :

- réflexive,
- symétrique,
- transitive.

On dit que "*a* est équivalent à *b*" quand $a \; R \; b$.

Relation d'équivalence

Relation d'équivalence

Une relation binaire est un relation d'équivalence quand elle est :

- réflexive,
- symétrique,
- transitive.

On dit que "a est équivalent à b" quand $a \; R \; b$.

Puisque R est symetrique :

$$a \; R \; b \Leftrightarrow b \; R \; a$$

et on dit que a et b sont équivalents.

Classe d'équivalence

Classe d'équivalence

Soit R une relation d"équivalence. On peut associer à chaque élément a de A l'ensemble des éléments qui lui sont équivalents. Cette partie de A est appelle la classe d'équivalence de a et on le note $cl(a)$.

Classe d'équivalence

Classe d'équivalence

Soit R une relation d"équivalence. On peut associer à chaque élément a de A l'ensemble des éléments qui lui sont équivalents. Cette partie de A est appelle la classe d'équivalence de a et on le note $cl(a)$.

L'ensemble des classes d'equivalence s'appelle l'ensemble quotient de A par la relation R, et on le note A/R.

Exemple

Sur $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *on définit la relation* R *en déclarant « $x \; R \; y$ quand $(x - y) \pmod 6 = 0$ ».*

Question 1 : *Dessigner son diagramme cartésien.*

Question 2 : *Prouver que* R *est une relation d'équivalence. (réflexive, symétrique, transitive)*

Question 3 : *Ecrire les éléments de* A *et leur classe d'équivalence.*

Solution :

- Réflexive
  $x - x = 0$
- symétrique
  Si
  $x\ R\ y \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}$ tq $x - y = 6 * p \Rightarrow y - x = -(x - y) = 6 * (-p)$
  $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}$ tq $y - x = 6 * q$.
- transitive
  Si $x\ R\ y$ et $y\ R\ z \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}$ tq $x - y = 6 * p$ et $y - z = 6 * q$.
  Donc, $x - z = x - y + y - z = 6 * p + 6 * q = 6(p + q) = 6 * k$
  avec $k \in \mathbb{Z}$.
- classe d'équivalence
  $cl(0) = \{0, 6\}, cl(1) = \{1, 7\}, cl(2) = \{2, 8\}, \ldots$

Par réflexivité on a que chaque élément est contenu dans sa classe d'équivalence :

$$a \in cl(a)$$

Par réflexivité on a que chaque élément est contenu dans sa classe d'équivalence :

$$a \in cl(a)$$

Deux classes qui ont un élément commun sont égales.

Partition

Rappelle :

On appelle partition d'un ensmble A un ensemble de parties non-vides de A qui posséde deux propriétés :

1. tout élément de A appartient à une composante de la partition,
2. deux composantes distinctses n'ont pas d'élément en commun.

Partition

Rappelle :

On appelle partition d'un ensmble A un ensemble de parties non-vides de A qui posséde deux propriétés :

1. tout élément de A appartient à une composante de la partition,
2. deux composantes distinctses n'ont pas d'élément en commun.

Théorème

Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur A sont les composantes d'une partition de A.

Partition

Rappelle :

On appelle partition d'un ensmble A un ensemble de parties non-vides de A qui posséde deux propriétés :

1. tout élément de A appartient à une composante de la partition,
2. deux composantes distinctses n'ont pas d'élément en commun.

Théorème

Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur A sont les composantes d'une partition de A.

Théorème

On peut associer à toute partition d'un ensemble une relation d'équivalence dont les classes sont les composantes de la partition.

Relation d'ordre

Idée : Une relation d'ordre est une relation qui classe éléments les uns par rapport aux autres.

Relation d'ordre

Idée : Une relation d'ordre est une relation qui classe éléments les uns par rapport aux autres.

Ordre

Une relation binaire est un relation d'ordre quand elle est :

- réflexive,
- antisymétrique,
- transitive.

Relation d'ordre

Idée : Une relation d'ordre est une relation qui classe éléments les uns par rapport aux autres.

Ordre

Une relation binaire est un relation d'ordre quand elle est :

- réflexive,
- antisymétrique,
- transitive.

Soit E un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre sur E. On dit que $(E, \preceq)$ est un ensemble ordonné.

Pour reconnaître qu'une relation est antisymétrique il suffit de vérifier sur son diagramme sagital qu'à chaque fois qu'une fléche va de a à b il n'y a pas, en retour, de flèche allant de b à a (à part les boucles bien sûr).

Une relation binaire est antisymetrique quand son diagramme cartésien ne contient pas deux cases noir situées hors de la diagonale, symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple

- *Les relations $\leqslant$ et $\geqslant$ sont des relations d'ordre sur $\mathbb{N}$.*
- *Les relations $>$ et $<$ ne sont pas relations d'ordre, car elles ne sont pas réflexives.*

Minorant/Majorant

Soit E un ensemble ordonné par la relation $\preceq$. Quand x et y sont deux éléments de E tels que $x \preceq y$, on dit que x est un minorant de y, ou x est minore y. On dit aussi que y est un majorant de x, ou encore que y majore x.

Minorant/Majorant

Soit E un ensemble ordonné par la relation $\preceq$. Quand x et y sont deux éléments de E tels que $x \preceq y$, on dit que x est un minorant de y, ou x est minore y. On dit aussi que y est un majorant de x, ou encore que y majore x.

Sur la diagramme sagittal on regarde que le minorant est au départ de la flèche et que le majorant est à l'arrivée.

Exemple

Soit $(\mathbb{N}, \leqslant)$ *l'ensemble ordonné. L'element* 22 *est nimore* 24 *et* 24 *est majore* 22.

Relation d’ordre strict

Ordre strict

Une relation binaire est un relation d’ordre strict quand elle est :

- irréflexive,
- transitive.

Relation d'ordre strict

Ordre strict

Une relation binaire est un relation d'ordre strict quand elle est :

- irréflexive,
- transitive.

Soit E un ensemble et $\prec$ une relation d'ordre strict sur E. On dit que $(E, \prec)$ est un ensemble strictement ordonné.

Question

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ où $<$ est l'ordre strict usuel est un ensemble ordonné ou strictement ordonné ?

Question

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ où $<$ est l'ordre strict usuel est un ensemble ordonné ou strictement ordonné ?

C'est un ensemble strictement ordonné.

Ordre total

Ordre total

Un ordre $\preceq$ sur E est dit total si deux éléments sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.$$

Un ordre qui n'est pas total est dit partiel.

Ordre total

Ordre total

Un ordre $\preceq$ sur E est dit total si deux éléments sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.$$

Un ordre qui n'est pas total est dit partiel.

Exemple

- *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ordonné par les relations habituelles "inférieur ou égal à" ($\leqslant$) ou "supérieur ou égal à" ($\geqslant$) est totalement ordonné.*
- *Chaînes de caractères classées par ordre alphabétique..*

Ordre strict total

Un ordre strict $\prec$ sur E est dit strict total si deux éléments différents sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow x \prec y \text{ ou } y \prec x.$$

Il est possible que les deux soient vrais.

Ordre strict total

Un ordre strict $\prec$ sur E est dit strict total si deux éléments différents sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow x \prec y \text{ ou } y \prec x.$$

Il est possible que les deux soient vrais.

Exemple

- $<$ *est strict,*
- $\leqslant$ *est non-strict,*
- $\subset$ *est strict,*
- $\subseteq$ *est non-strict.*