Informatique fondamentale

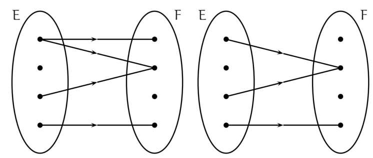
TD-4

4 avril 2024

Fonctions et applications

Une *fonction* f d'un ensemble X dans un ensemble Y est définie par un ensemble G de paires ordonnées (x, y) avec $x \in X$, $y \in Y$, tel que chaque élément de X est le premier composant d'exactement une élément G.

Exercice 1. *Lequel des images suivants est une fonction ?*



Exercice 2. *Lesquelles des projections suivantes sont des fonctions ?*

1. $f\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *avec* $f(x) = -5$
2. $f\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *avec* $f(x) = x$
3. $f\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *avec* $f(x) = x + 20$
4. $f\ : \{0, 1\} \to \mathbb{Z}$, *avec* $f(0) = 10$ *et* $f(1) = 8$

Exercice 3. *Soit A l'ensemble de toutes les lettres de l'alphabet français,*

$$A = \{a, b, c, ..., x, y, z\}.$$

Considérons la fonction $f : A \to \mathbb{N}$ qui envoie la n-ème lettre de l'alphabet au nombre n. Par exemple, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ et $f(Z) = 26$. Cette fonction est bien définie pour n'importe quelle lettre de l'alphabet et produira un nombre naturel (puisque sa place dans l'alphabet est un nombre entier non négatif). Quelle est son image et quel est son domaine de définition ?

Exercice 4. *Définissez une fonction qui transforme la température en degrés Celsius en température en degrés Fahrenheid. Quel est le domaine et l'image de cette fonction ?*
(Indice : $(1°C \times 9/5) + 32 = 33.8°F$)

Exercice 5. *Soit $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = 3 - 2x$. Exprimer $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ et calculer $(g \circ f)(4)$ et $(f \circ g)(4)$.*

Exercice 6. *Quelle est l'expression des fonctions réciproques des fonction f définie par $f(x) = 2x - 5$ et g définie par $g(x) = x^3 + 18$?*

Exercice 7. *Soit $f\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tq $f(x) = 3x$ et $g\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tq $g(x) = x^2$. Calculer $g \circ f(2)$ et $f \circ g(2)$. Existe-t-il des valeurs x pour lesquelles $g \circ f(x) = f \circ g(x)$?*

Exercice 8. *Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont bijections :*

1. $f\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *avec* $f(x) = x^4$
2. $g\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *avec* $g(x) = x^4$
3. $h\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *avec* $h(x) = x^2 + 4x + 4$
4. $k\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *avec* $k(x) = x^2 + 4x + 4$

Exercice 9. *Est-ce que la fonction suivante a bijection ?*

$$f\ : \mathbb{N} \to \mathbb{B},\ \textit{avec}\ f(x) = \begin{cases} 2x & \textit{si } x \textit{ pair} \\ x & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Suites

Exercice 10. *Les suites suivantes sont-elles croissantes ? décroissantes ?*

1. $u_n = 3u_n^2 + 5$, *pour* $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \frac{-2n+3}{n+1}$, *pour* $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = \frac{2^n}{n}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$

Remark : Il faut calculer $u_n - u_{n-1}$*. Si le résultat est positif pour tout* n*, alors la suite est croissante, s'il est toujours négatif, elle est décroissante.*

Exercice 11. *Une personne lance une "superballe" pour la faire rebondir au sol. Après le premier rebond la balle atteint 10 mètres de hauteur. A chaque rebond la balle perd 30% de hauteur.*

1. *Soit* h_n *la suite de la hauteur maximale, en mètre, de la balle à chaque rebond* n*. Trouvez une relation de récurrence et les conditions initiales pour définir la suite* (h_n)*.*
2. *Au bout de combien de rebonds le mouvement de celle-ci ne sera plus perceptible ? (rebond de moins de 1 mm).*

Exercice 12. *Soit la suite définie par*

$$(u_n) = \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

1. *Calculer* u_1, u_2 *et* u_3*.*
2. *Soit* (v_n) *la suite définie par* $v_n = u_n^2$*. Calculer* v_0, v_1, v_2 *et* v_3*.*
3. *S'agit-il d'une suite croissante ?*