Semaine 5 - Fonctions et applications

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

12 avril 2023

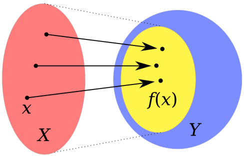
Plan du cours

1. Fonctions
   - Représentation
2. Applications
   - Composition
   - Injection
   - Surjection
   - Bijection
   - Identité
   - Réciproque
3. Fonction caractéristique d'un ensemble
4. Suites

Fonctions

Les fonctions sont le moyen par lequel les elements **communiquent** entre eux.

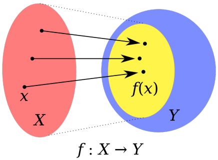
Plus précisément, on appelle rélation fonctionelle ou fonction partielle d'un ensemble X vers un ensemble Y toute loi qui permet d'associer à chaque élément x au plus un **unique** élément y de Y.



$f : X \to Y$

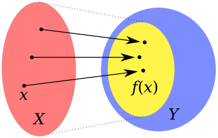
Fonction partielle

Une fonction partielle $f : X \to Y$ (de X dans Y) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq X \times Y$ tel que pour tout $x \in X$, il existe au plus un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G_f$, on note $y = f(x)$.



Fonction partielle

Une fonction partielle $f : X \to Y$ (de X dans Y) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq X \times Y$ tel que pour tout $x \in X$, il existe au plus un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G_f$, on note $y = f(x)$.

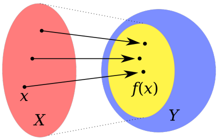


$f : X \to Y$

- X est l'ensemble de départ, ou la source.

Fonction partielle

Une fonction partielle $f : X \to Y$ (de X dans Y) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq X \times Y$ tel que pour tout $x \in X$, il existe au plus un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G_f$, on note $y = f(x)$.

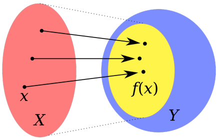


$f : X \to Y$

- X est l'ensemble de départ, ou la source.
- Y est l'ensemble d'arrivée, ou le but.

Fonction partielle

Une fonction partielle $f : X \to Y$ (de X dans Y) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq X \times Y$ tel que pour tout $x \in X$, il existe au plus un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G_f$, on note $y = f(x)$.

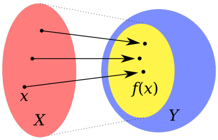


$f : X \to Y$

- X est l'ensemble de départ, ou la source.
- Y est l'ensemble d'arrivée, ou le but.
- Le domaine de définition de f est l'ensemble des éléments de X qoi ont une image par f. On le note $Dom(f)$.

Fonction partielle

Une fonction partielle $f : X \to Y$ (de X dans Y) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq X \times Y$ tel que pour tout $x \in X$, il existe au plus un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G_f$, on note $y = f(x)$.



$f : X \to Y$

- X est l'ensemble de départ, ou la source.
- Y est l'ensemble d'arrivée, ou le but.
- Le domaine de définition de f est l'ensemble des éléments de X qoi ont une image par f. On le note $Dom(f)$.
- L'image de f et l'ensemble des images des éléments de $Dom(X)$. On le note

$$Im(f) = f[X] = \{f(x) : x \in X\}$$

Si X est l'ensemble vide, l'image de f est vide,

$$f(\emptyset) = \emptyset.$$

Si X est l'ensemble vide, l'image de f est vide,

$$f(\emptyset) = \emptyset.$$

Quand C est un sous-ensemble de X, on note $f(C)$ l'ensemble des images des éléments de C.

Exemple

On range certains vêtements dans les tiroirs d'une armoire préalablement vide. En associant à chaque vêteêent le tiroir qui le contient, on définit une fonction qui va de l'ensemble des vetements vers l'ensemble des tiroirs.

Question 1 : *Quelle est l'image de la fonction ?*

Question 2 : *Quel est le domaine de la fonction ?*

Exemple

On range certains vêtements dans les tiroirs d'une armoire préalablement vide. En associant à chaque vêteêent le tiroir qui le contient, on définit une fonction qui va de l'ensemble des vetements vers l'ensemble des tiroirs.
Question 1 : *Quelle est l'image de la fonction ?*
Question 2 : *Quel est le domaine de la fonction ?*

Solution : Son image est l'ensemble des tiroirs qui ne sont pas vides, son domaine de définition est l'ensemble des vêtements rangés.

Exemple

L'action qui consiste à associer à chaque nombre entier

- *l'entier* 1*, si le nombre est pair,*
- *et l'entier* 0*, si le nombre est impair,*

est une fonction de $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{B}$*.*

Une fonction peut être représentée par :

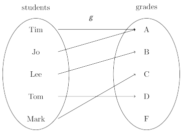
- **Formule algébrique**

  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ sur $X = \{0, 1, 2\}$

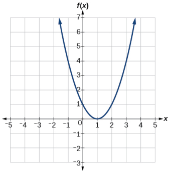
- **Table de valeur**

x	1	2	3
$f(x)$	-1	4	15

- **Diagramme de Venn**



- **Courbe**

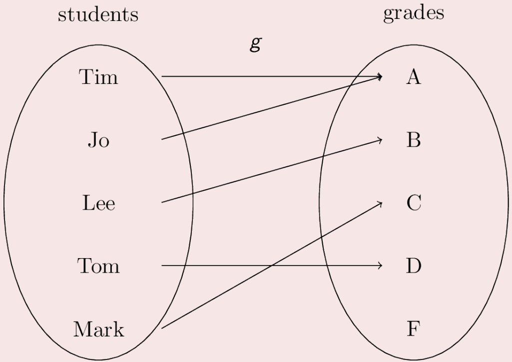


L'informatique manipules des symboles et pas seulement les nombres, donc les fonctions ne sont pas nécessairement définies par des formules mathématiques.

L'informatique manipules des symboles et pas seulement les nombres, donc les fonctions ne sont pas nécessairement définies par des formules mathématiques.

Exemple

Soit $g : \{Tim, Tom, Jo, Lee, Mark\} \to \{A, B, C, D, F\}$ la fonction qui renvoie l'étudiant à la note qu'il a obtenue lors d'un examen.



Application

Une fonction $f : X \to Y$ est une application si $Dom(f) = X$.

En d’autres termes, si f est définie partout, on dit que f est une application.

Application

- Une fonction $f : X \to Y$ est une application si $Dom(f) = X$.

En d'autres termes, si f est définie partout, on dit que f est une application.

- On note Y^X l'ensemble des applications de X dans Y.

Application

Une fonction $f : X \to Y$ est une application si $Dom(f) = X$.

En d'autres termes, si f est définie partout, on dit que f est une application.

- On note Y^X l'ensemble des applications de X dans Y.

Exemple

*définit une fonction de $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dans Y mais **pas** une application.*

Application

Une fonction $f : X \to Y$ est une application si $Dom(f) = X$.

En d'autres termes, si f est définie partout, on dit que f est une application.

- On note Y^X l'ensemble des applications de X dans Y.

Exemple

*définit une fonction de $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dans Y mais **pas** une application.Soit $X' = \{0, 1, 3\}$ et $Y = \{a, b, c\}$. Le graphe*

$$G_f = \{(0, a), (1, c), (3, a)\} \subseteq X' \times Y$$

définit une fonction de X dans Y qui est une application.

Egalité

- On dit que deux fonctions f et g sont égales si :
  1. f et g ont le même ensemble de définition D,
  2. pour tout x de D, $f(x) = g(x)$.

On note alors $f = g$.

Egalité

On dit que deux fonctions f et g sont égales si :

1. f et g ont le même ensemble de définition D,
2. pour tout x de D, $f(x) = g(x)$.

On note alors $f = g$.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\backslash\{3\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(x-3)(x^2+1)}{x-3} \\ g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

Egalité

On dit que deux fonctions f et g sont égales si :

1. f et g ont le même ensemble de définition D,
2. pour tout x de D, $f(x) = g(x)$.

On note alors $f = g$.

Exemple

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\backslash\{3\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(x-3)(x^2+1)}{x-3} \\ g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

*Les fonctions **ne sont pas égales** car elles n'ont pas le même ensemble de définition.*

Composition

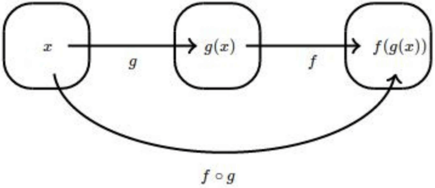
Fonction composée

La fonction composée de $f : E \to F$ par $g : F \to G$ est définie par,

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

et

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}.$$



Exemple

Soit $g(x) = x + 4$ *et* $h(x) = x^2 - x$. *Exprimer* $(h \circ g)(x)$ *et calculer* $(h \circ g)(2)$ *et aprés exprimer* $(g \circ h)(x)$ *et calculer* $(g \circ h)(2)$.

Exemple

Soit $g(x) = x + 4$ et $h(x) = x^2 - x$. Exprimer $(h \circ g)(x)$ et calculer $(h \circ g)(2)$ et aprés exprimer $(g \circ h)(x)$ et calculer $(g \circ h)(2)$.

Solution :

$$\begin{array}{rcl} (h \circ g)(x) & = & h(g(x)) \\ & = & (g(x))^2 - (g(x)) \\ & = & (x+4)^2 - (x+4)) \\ & = & x^2 + 8x + 16 - x - 4 \\ & = & x^2 + 7x + 12 \end{array}$$

et

$$(h \circ g)(2) = 2^2 + 7 \times 2 + 12 = 4 + 14 + 12 = 30.$$

En général $f \circ g \neq g \circ f$.

⚠ En général $f \circ g \neq g \circ f$.

⚠ La composition est associative :

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Injection

Injection

Une fonction $f : X \to Y$ est injective quand deux éléments distincts ont des images distinctes :

$$\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Par contraposée, c'est équivalent à :

$$\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Surjection

Surjection

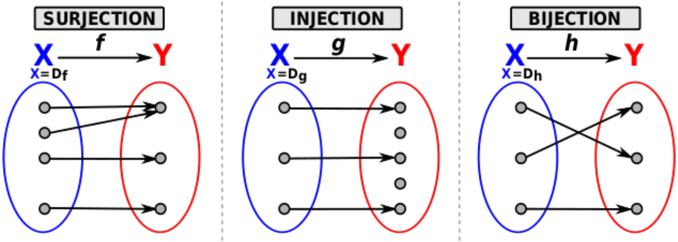
Une fonction $f : X \to Y$ est surjective quand tout élément de Y a un antécédent dans X :

$$\forall y \in Y, \exists x_y \in X \text{ tel que } f(x_y) = y.$$

Bijection

Bijection

Une fonction $f\ : X \to Y$ est bijective quand elle est à la fois injective et surjective.



Identité

Identité

Soit X un ensemble. L'identité sur l'ensemble X est l'application Id_X de X sur X définie pour tout $x \in X$ par $f(x) = x$.

Identité

Identité

Soit X un ensemble. L'identité sur l'ensemble X est l'application Id_X de X sur X définie pour tout $x \in X$ par $f(x) = x$.

Exemple

Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *L'identité sur* X *est* $Id_x : X \to X$ *such that,*

$$Id_x = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}.$$

Réciproque

Théorème

Soit f une application de X sur F. L'application f est bijection si et seulement si il existe une application g de Y dans X telle que :

- $f \circ g = Id_Y$,
- $g \circ f = Id_X$.

On appelle l'application g la réciproque de f et on la note f^{-1}.

Réciproque

Théorème

Soit f une application de X sur F. L'application f est bijection si et seulement si il existe une application g de Y dans X telle que :

- $f \circ g = Id_Y$,
- $g \circ f = Id_X$.

On appelle l'application g la réciproque de f et on la note f^{-1}.

Exemple

Lorsqu'une pizza est partagée entre des amis, plus il y a de personnes qui mangent, moins il y a de pizza pour tout le monde. La quantité que chaque personne reçoit peut être décrite à l'aide d'une **fonction réciproque**.

Comment établir l'expression de la fonction réciproque ?

Par définition, si $f^{-1}(y) = x$, alors $f(x) = y$.
Donc, l'image de y par la fonction f^{-1} est le nombre x qui a comme image y par la fonction f.

Comment établir l'expression de la fonction réciproque ?

Par définition, si $f^{-1}(y) = x$, alors $f(x) = y$.
Donc, l'image de y par la fonction f^{-1} est le nombre x qui a comme image y par la fonction f.

Exemple

Soit $f(x) = 5x + 4$,

Comment établir l'expression de la fonction réciproque ?

Par définition, si $f^{-1}(y) = x$, alors $f(x) = y$.
Donc, l'image de y par la fonction f^{-1} est le nombre x qui a comme image y par la fonction f.

Exemple

Soit $f(x) = 5x + 4$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x + 4 \\ y &= 5x + 4 \\ y - 4 &= 5x \\ \frac{y-4}{5} &= x \\ f^{-1}(y) &= \frac{y-4}{5}. \end{aligned}$$

Fonction caractéristique

Fonction caractéristique

Une **fonction caractéristique**, ou **fonction indicatrice**, est une fonction définie sur un ensemble E qui explicite l'appartenance ou non à un sous-ensemble S de E de tout élément de E.

$$1_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Suites numériques

Suite numérique

Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel $u(n)$.

Nous utilisons la notation (u_n) pour la suite. Il en résulte que u_n est un nombre (réel) ! ! !

Suites numériques

Suite numérique

Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel $u(n)$.

Nous utilisons la notation (u_n) pour la suite. Il en résulte que u_n est un nombre (réel) ! ! !

Une suite (u_n) est définie par une formule explicite lorsque u_n s'exprime directement en fonction de l'indice n. Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.

Suite récurrente

Une suite (u_n) définie **par récurrence** est une suite définie par son (ou ses) premier(s) terme(s) et par une **relation de récurrence**, qui définit chaque terme à partir du précédent ou des précédents lorsqu'ils existent.
La relation de récurrence lie le terms u_n de la suite à des valeurs u_i pour $i < n$ ainsi que aux des conditions dites initiales.

Suite récurrente

Une suite (u_n) définie **par récurrence** est une suite définie par son (ou ses) premier(s) terme(s) et par une **relation de récurrence**, qui définit chaque terme à partir du précédent ou des précédents lorsqu'ils existent.
La relation de récurrence lie le terms u_n de la suite à des valeurs u_i pour $i < n$ ainsi que aux des conditions dites initiales.

Exemple :
La suite de Fibonacci est définie par :

- Les conditions initiales $f_1 = 1$ et $f_2 = 1$.
- Une relation de récurrence $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geqslant 3$.

Exercices (Suites)

Exercice 1 Soit la suite définie par

$$(u_n) = \begin{cases} u_0 = 10 & n < 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 & n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3u_n$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
3. S'agit-il d'une suite croissante (c-à-d chaque terme est supérieur ou égal à son précédent) ?

Exercice 2 Une personne investit 500 euros à un taux annuel de 5% composé annuellement. Si A_n la suite qui représente le montant après n années, trouvez une relation de récurrence et les conditions initiales pour définir (A_n).