Semaine 5 - Relations d'ordre (suite)

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

25 mars 2023

Relations sur les relations

⚠ Puisque les relations sont des ensembles (de paires), les relations s'appliquent également aux relations.

Relations sur les relations

Puisque les relations sont des ensembles (de paires), les relations s'appliquent également aux relations.

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ des relations sur E.

- $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont égales si :

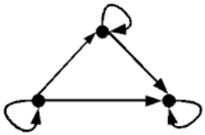
$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y, \text{ si et seulement si } x\mathcal{S}y.$$

- $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de S si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ implique } x\mathcal{S}y.$$

Diagramme de Hasse

Un diagramme de Hasse est une représentation graphique d'un ordre partiel.



On obtient ce diagramme à partir du diagramme sagittal :

- Pas d'auto-boucles : par **réflexivité**, nous pouvons toujours les rajouter.
- Les éléments supérieurs sont plus grands que les éléments inférieurs éléments inférieurs : par **antisymétrie**, les arêtes ne peuvent aller que dans une seule direction.
- Pas d'arêtes redondantes : par transitivité, nous pouvons peut déduire les bords manquants.

Nous dirons que y est un successeur immédiat de x quand :

- $x \preceq y$ (c-à-d il y a une fléche de x à y),
- y est différent de x (c-à-d la fléche n'est pas une boucle), et
- il n'existe pas d'élement z tel que $x \preceq z$ et $z \preceq y$ (c-à-d en suivant les flèches, on ne peut pas aller de x à y par étape).

Nous dirons que y est un successeur immédiat de x quand :

- $x \preceq y$ (c-à-d il y a une fléche de x à y),
- y est différent de x (c-à-d la fléche n'est pas une boucle), et
- il n'existe pas d'élement z tel que $x \preceq z$ et $z \preceq y$ (c-à-d en suivant les flèches, on ne peut pas aller de x à y par étape).

Exemple

Soit $(\mathbb{N}, \leqslant)$ *l'ensemble ordonné. L'élément* 3 *est le seul successeur immédiat de* 2*.*

Exemple

Soit $\mathbb{N}^+$ *avec la relation de divisibilité* $|$. *Il existe une infinité de successeurs immédiats de* 2 *:* $4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, 36,$ *etc.*

Exemple

Soit l'ordre lexicographique. Le successeur immédiat de 100 *est* 1000 *(et non pas* 101 *car* $1000 \preceq 101$*).*

Exemple diagramme de Hasse

Exemple

Soit la relation de divisibilité dans l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. *Représentez cette relation à travers un diagramme de Hasse.*

Exemple diagramme de Hasse

Exemple

Soit la relation de divisibilité dans l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$*.*
Représentez cette relation à travers un diagramme de Hasse.

- **Étape 1 :** Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre partiel.
- **Étape 2 :** Identifier les Relations
- **Étape 3 :** Déterminer les Niveaux (c-à-d arrangez ces nombres en niveaux basés sur leur divisibilité)
- **Étape 4 :** Créer le Diagramme

Étape 1

S : Pour a et $b \in S$, on dit que $a | b$ si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ak$.

Étape 1

S : Pour a et $b \in S$, on dit que $a|b$ si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ak$.

- **Réflexivité**
  Preuve : Considérons $k = 1$. Alors, pour tout $a \in S$, nous avons $a = a \times 1$, ce qui signifie que $a|a$.
- **Antisymétrie**
  Preuve : Si $a|b$, il existe un entier k tel que $b = ak$. Si $b|a$, il existe un entier m tel que $a = bm$. En combinant ces deux, nous obtenons $a = ak \times m$. Si $a \neq 0$, cela implique que $km = 1$, ce qui est possible seulement si $k = m = 1$, et donc $a = b$.
- **Transitivité**
  Preuve : Si $a|b$, il existe un entier k tel que $b = ak$. Si $b|c$, il existe un entier m tel que $c = bm$. Substituant b dans la deuxième équation, nous obtenons $c = ak \times m$, ce qui signifie que $a|c$.

Étape 2

- 1 divise tous les nombres
- 2 divise 2, 4, 6, 12
- 3 divise 3, 6 et 12
- 4 divise 4, 12
- 6 divise 6, 12

Étape 3

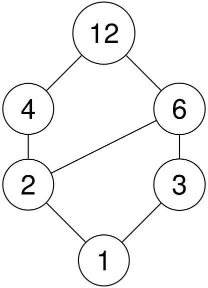
Un niveau dans un diagramme de Hasse reflète un ensemble d'éléments qui partagent une certaine propriété de connectivité par rapport à cette relation d'ordre. Les niveaux sont disposés verticalement, du bas vers le haut, où le bas représente les éléments les moins spécifiés ou les plus petits dans la relation d'ordre, et le haut représente les éléments les plus spécifiés ou les plus grands. Chaque élément d'un niveau donné est représenté par un point (ou un nœud), et les relations entre les éléments sont représentées par des lignes qui connectent ces points, sans former de boucles ni de lignes croisées.

Étape 3

Arrangez ces nombres en niveaux basés sur leur divisibilité :

- **Niveau 1 :** L'élément '1' est au niveau le plus bas car il divise tous les autres éléments sans être divisé par aucun autre (à part lui-même, suivant la réflexivité de la relation).
- **Niveau 2 :** Les éléments '2' et '3' peuvent être placés au deuxième niveau car ils divisent certains éléments au-dessus d'eux mais sont eux-mêmes divisés par '1'.
- **Niveau 3 :** '4' et '6' sont au troisième niveau. '4' est divisé par '2' et '6' par '2' et '3'. Ils divisent à leur tour l'élément du niveau supérieur.
- **Niveau 4 :** '12' est au niveau le plus haut car c'est l'élément qui a le plus de diviseurs dans cet ensemble et il ne divise aucun autre élément de l'ensemble à part lui-même.

Étape 4



Exemple 2 par CS103 de Standford

Data : http ://www.london2012.com/medals/medal-count/

Jeux olympiques 2012

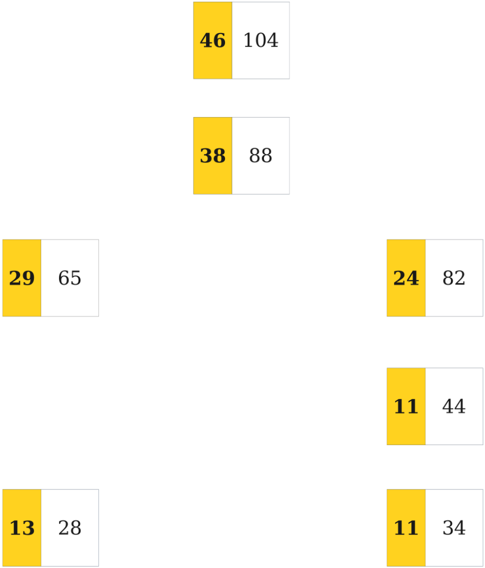
Or	Argent	Bronze	Total
46	29	29	104
38	27	23	88
29	17	19	65
24	26	32	82
13	8	7	28
11	19	14	44
11	11	12	34

Relation :

$(or_0, total_0)\mathcal{R}\,(\mathrm{or}_1, total_1)$

si

$or_0 \leqslant \mathrm{or}_1 \quad et \quad total_0 \leqslant \mathrm{total}_1$


46 104
38 88
29 65
24 82
11 44
13 28
11 34

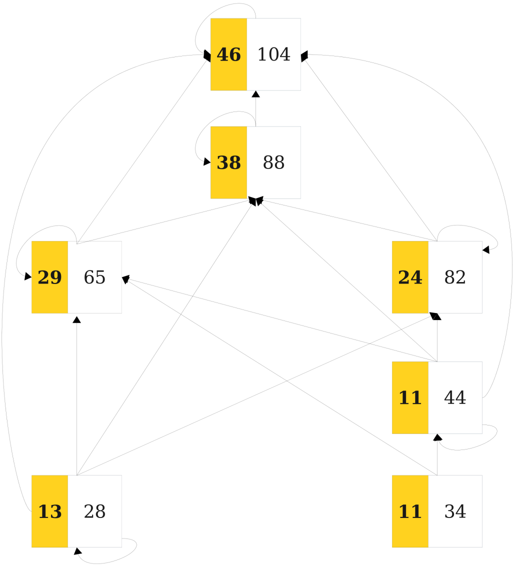


Figure – Diagramme sagittal

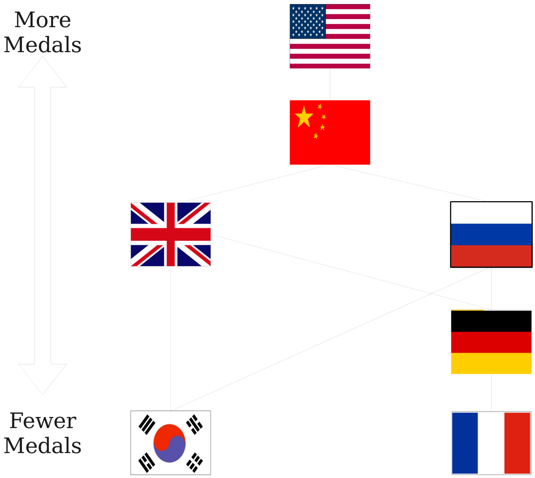


Figure – Diagramme de Hasse