

Semaine 4 - Relations d'ordre

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

26 fevrier 2024

Relation



Relation

■ **Une relation** est un ensemble de paires ordonnées.

Par exemple :

- Relations en mathématiques : \geq , \neq , ...
- Relations dans les langues naturelles : l'instructeur de, la capitale de, ...
- [la capitale de] =
 $\{(USA, Washington), (Chine, Pékin), (France, Paris), \dots\}$
 $= \{(x, y) : y \text{ est la capitale de } x\}$
- [invité] = $\{(Andy, Billy), (Cindy, Danny), (Emily, Flori), \dots\}$
 $= \{(x, y) : x \text{ a invité } y\}$

Relation binaire



Relation binaire

Soit E un ensemble. Une **relation binaire** R sur E est un sous-ensemble de produit $E \times E$.

On note $x R y$ pour signifier que $(x, y) \in R$ et $x \not R y$ pour signifier que $(x, y) \notin R$.



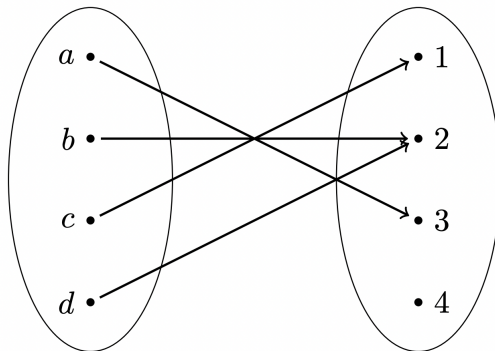
Relation

Une relation R est une relation de A vers B si et seulement si R est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$, écrit comme $R \subseteq A \times B$.

Par exemple :

- a. [the capital city of] $\subseteq \{x : x \text{ is a country}\} \times \{y : y \text{ is a city}\}$
- b. [the mother of] $\subseteq \{x : x \text{ is a human}\} \times \{y : y \text{ is a human}\}$

Nous pouvons utiliser un diagramme pour illustrer une relation :



Domaine et Image



Domaine et Image

A et B sont respectivement le **domaine et l'image** de R si et seulement si $A \times B$ est le *plus petit* produit cartésien dont R est un sous-ensemble.

Par exemple :

- Soit $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$, alors :
 $Dom(R) = \{1, 2, 3\}$, $Im(R) = \{a, b\}$

Discussion 1/2

? Pourquoi les définitions suivantes sont-elles problématiques ?
Donnez des contre-exemples.

- a. A et B sont le domaine et l'image de R si et seulement si
 $R = A \times B$.

Discussion 1/2

? Pourquoi les définitions suivantes sont-elles problématiques ?
Donnez des contre-exemples.

a. A et B sont le domaine et l'image de R si et seulement si
 $R = A \times B$.

a. Incorrecte car elle implique que toutes les paires possibles du produit cartésien $A \times B$ sont présentes dans la relation R , ce qui n'est pas nécessairement le cas pour une relation.

Contre-exemple : Soit $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b\}$. Le produit cartésien $A \times B$ est $\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$. Si nous avons une relation $R = \{(1, a), (2, b)\}$, alors R ne représente pas $A \times B$ car il manque les paires $(1, b)$ et $(2, a)$, bien que le domaine soit A et l'image soit B .

Discussion 1/2

? Pourquoi les définitions suivantes sont-elles problématiques ?
Donnez des contre-exemples.

- b. A et B sont le domaine et l'image de R si et seulement si $R \subseteq A \times B$.

Discussion 1/2

?

Pourquoi les définitions suivantes sont-elles problématiques ?
Donnez des contre-exemples.

b. A et B sont le domaine et l'image de R si et seulement si
 $R \subseteq A \times B$.

b. Cette définition est trop générale. Elle ne garantit pas que chaque élément de A est relié à un élément de B et que chaque élément de B est l'image d'un élément de A .

Contre-exemple : Considérez $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c\}$ avec la relation $R = \{(1, a), (2, b)\}$. Ici, R est bien un sous-ensemble de $A \times B$ mais le domaine de R est réduit à $\{1, 2\}$ et non A , et l'image est $\{a, b\}$ et non B .

Propriétés des relations

On dit que R est :

- **réflexive** quand $\forall x \in E, x R x$,
- **irréflexive** quand $\forall x \in E, x \not R x$,
- **symétrique** quand $\forall x, y \in E, x R y \Rightarrow y R x$,
- **antisymétrique** quand $\forall x, y \in E, x R y$ et $y R x \Rightarrow x = y$,
- **transitive** quand $\forall x, y, z \in E, x R y$ et $y R z \Rightarrow x R z$.

Relation d'équivalence



Relation d'équivalence

Une relation binaire est un **relation d'équivalence** quand elle est :

- réflexive,
- symétrique,
- transitive.

On dit que "**a est équivalent à b**" quand $a R b$.

Relation d'équivalence



Relation d'équivalence

Une relation binaire est un **relation d'équivalence** quand elle est :

- réflexive,
- symétrique,
- transitive.

On dit que "**a est équivalent à b**" quand $a R b$.



Puisque R est symétrique :

$$a R b \Leftrightarrow b R a$$

et on dit que **a et b sont équivalents**.

Classe d'équivalence



Classe d'équivalence

Soit R une relation d'équivalence. On peut associer à chaque élément a de A l'ensemble des éléments qui lui sont équivalents. Cette partie de A est appelée **la classe d'équivalence de a** et on le note $cl(a)$.

Classe d'équivalence



Classe d'équivalence

Soit R une relation d'équivalence. On peut associer à chaque élément a de A l'ensemble des éléments qui lui sont équivalents. Cette partie de A est appelée **la classe d'équivalence de a** et on le note $cl(a)$.

L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle **l'ensemble quotient** de A par la relation R , et on le note A/R .

Exemple

Sur $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ on définit la relation R en déclarant « $x R y$ quand $(x - y) \pmod{6} = 0$ ».

Question 1 : Dessigner son diagramme cartésien.

Question 2 : Prouver que R est une relation d'équivalence.
(réflexive, symétrique, transitive)

Question 3 : Ecrire les éléments de A et leur classe d'équivalence.

Solution :

■ Réflexive

$$x - x = 0$$

■ symétrique

Si

$$\begin{aligned}x R y &\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tq } x - y = 6 * p \Rightarrow y - x = -(x - y) = 6 * (-p) \\ &\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \text{ tq } y - x = 6 * q.\end{aligned}$$

■ transitive

Si $x R y$ et $y R z \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}$ tq $x - y = 6 * p$ et $y - z = 6 * q$.
Donc, $x - z = x - y + y - z = 6 * p + 6 * q = 6(p + q) = 6 * k$
avec $k \in \mathbb{Z}$.


■ classe d'équivalence

$$cl(0) = \{0, 6\}, cl(1) = \{1, 7\}, cl(2) = \{2, 8\}, \dots$$




Par réflexivité on a que chaque élément est contenu dans sa classe d'équivalence :

$$a \in cl(a)$$

 Par réflexivité on a que chaque élément est contenu dans sa classe d'équivalence :

$$a \in cl(a)$$

 Deux classes qui ont un élément commun sont égales.

Partition

Rappelle :

On appelle **partition** d'un ensemble A un ensemble de parties non-vides de A qui possède deux propriétés :

- 1 tout élément de A appartient à une composante de la partition,
- 2 deux composantes distinctes n'ont pas d'élément en commun.

Partition

Rappelle :

On appelle **partition** d'un ensemble A un ensemble de parties non-vides de A qui possède deux propriétés :

- 1 tout élément de A appartient à une composante de la partition,
- 2 deux composantes distinctes n'ont pas d'élément en commun.

Théorème

Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur A sont les composantes d'une partition de A .

Partition

Rappelle :

On appelle **partition** d'un ensemble A un ensemble de parties non-vides de A qui possède deux propriétés :

- 1 tout élément de A appartient à une composante de la partition,
- 2 deux composantes distinctes n'ont pas d'élément en commun.

Théorème

Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur A sont les composantes d'une partition de A .

Théorème

On peut associer à toute partition d'un ensemble une relation d'équivalence dont les classes sont les composantes de la partition.

Relation d'ordre



Idée : Une relation d'ordre est une relation qui classe éléments les uns par rapport aux autres.

Relation d'ordre



Idée : Une relation d'ordre est une relation qui classe éléments les uns par rapport aux autres.



Ordre

Une relation binaire est un **relation d'ordre** quand elle est :

- réflexive,
- antisymétrique,
- transitive.

Relation d'ordre



Idée : Une relation d'ordre est une relation qui classe éléments les uns par rapport aux autres.



Ordre

Une relation binaire est un **relation d'ordre** quand elle est :

- réflexive,
- antisymétrique,
- transitive.

Soit E un ensemble et \leq une relation d'ordre sur E . On dit que (E, \leq) est un **ensemble ordonné**.



Pour reconnaître qu'une relation est antisymétrique il suffit de vérifier sur son diagramme sagittal qu'à chaque fois qu'une flèche va de a à b il n'y a pas, en retour, de flèche allant de b à a (à part les boucles bien sûr).



Une relation binaire est antisymétrique quand son diagramme cartésien ne contient pas deux cases noires situées hors de la diagonale, symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple

- *Les relations \leq et \geq sont des relations d'ordre sur \mathbb{N} .*
- *Les relations $>$ et $<$ ne sont pas relations d'ordre, car elles ne sont pas réflexives.*



Minorant/Majorant

Soit E un ensemble ordonné par la relation \leq . Quand x et y sont deux éléments de E tels que $x \leq y$, on dit que x est un **minorant** de y , ou x est **minore** y . On dit aussi que y est un **majorant** de x , ou encore que y **majore** x .



Minorant/Majorant

Soit E un ensemble ordonné par la relation \leq . Quand x et y sont deux éléments de E tels que $x \leq y$, on dit que x est un **minorant** de y , ou x est **minore** y . On dit aussi que y est un **majorant** de x , ou encore que y **majore** x .



Sur la diagramme sagittal on regarde que le minorant est au départ de la flèche et que le majorant est à l'arrivée.

Exemple

Soit (\mathbb{N}, \leq) l'ensemble ordonné. L'élément 22 est inférieur à 24 et 24 est supérieur à 22.

Relation d'ordre strict



Ordre strict

Une relation binaire est un **relation d'ordre strict** quand elle est :

- irreflexive,
- transitive.

Relation d'ordre strict



Ordre strict

Une relation binaire est un **relation d'ordre strict** quand elle est :

- irreflexive,
- transitive.

Soit E un ensemble et $<$ une relation d'ordre strict sur E . On dit que $(E, <)$ est un **ensemble strictement ordonné**.



Question



L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} où $<$ est l'ordre strict usuel est un ensemble ordonné ou strictement ordonné ?



Question



L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} où $<$ est l'ordre strict usuel est un ensemble ordonné ou strictement ordonné ?

C'est un ensemble strictement ordonné.

Ordre total



Ordre total

Un ordre \leq sur E est dit **total** si deux éléments sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Un ordre qui n'est pas total est dit **partiel**.

Ordre total



Ordre total

Un ordre \leq sur E est dit **total** si deux éléments sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Un ordre qui n'est pas total est dit **partiel**.

Exemple

- *L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} ordonné par les relations habituelles "inférieur ou égal à" (\leq) ou "supérieur ou égal à" (\geq) est totalement ordonné.*
- *Chaînes de caractères classées par ordre alphabétique..*



Ordre strict total

Un ordre strict $<$ sur E est dit **strict total** si deux éléments différents sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow x < y \text{ ou } y < x.$$

Il est possible que les deux soient vrais.



Ordre strict total

Un ordre strict $<$ sur E est dit **strict total** si deux éléments différents sont toujours comparables :

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow x < y \text{ ou } y < x.$$

Il est possible que les deux soient vrais.

Exemple

- $<$ est strict,
- \leq est non-strict,
- \subset est strict,
- \subseteq est non-strict.