Semaine 3 - Théorie des ensembles (suite)

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

05 fevrier 2024

Plan du cours

- Sous-ensembles
- Ensemble puissance
- Egalité
- Partition
- Produit d'ensembles
- Ensembles finis et infinis
- Cardinalité
- Propriété paradoxale

Sous-ensemble

Un ensemble B est un sous-ensemble d'un ensemble A si tous les éléments de B sont également des éléments de A. Dans ce cas A est un sur-ensemble de B.

Sous-ensemble

Un ensemble B est un sous-ensemble d'un ensemble A si tous les éléments de B sont également des éléments de A. Dans ce cas A est un sur-ensemble de B.

Notation

Si B est un sous-ensemble de A on ecrit,

$$\begin{aligned} B &\subseteq A \\ A &\supseteq B. \end{aligned}$$

Ensemble puissance

Ensemble puissance

Soit E un ensemble. L'ensemble puissance ou l'ensemble des parties de E est l'ensemble, généralement noté $pow(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E :

$$A \in pow(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Exemple

Soit $E = \{a, b, c\}$. Les sous-ensembles de E sont :

- $\emptyset$ *et* E,
- *les trois singletons* $\{a\}, \{b\}$ *et* $\{c\}$,
- *les trois paires* $\{a, b\}, \{a, c\}$ *et* $\{b, c\}$.

Donc, l'ensemble puissance est :

$$pow(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

Ensembles inégaux

Deux ensembles sont inégaux si il existe au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B.

Ensembles inégaux

Deux ensembles sont inégaux si il existe au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B.

Exemple

- $A = \{1, 2, 4, 7\}$ *et* $B = \{1, 7, 4, 2\}$ *sont égaux.*
- $A = \{1, 2, 5, 7\}$ *et* $B = \{1, 7, 4, 3\}$ *sont inégaux.*

Si A et B sont égaux, alors B est un sous-ensemble propre (ou strict) de A et il est noté par,

$$B \subsetneq A.$$

Si A et B sont égaux, alors B est un sous-ensemble propre (ou strict) de A et il est noté par,

$$B \subsetneq A.$$

La relation selon laquelle un ensemble est un sous-ensemble d'un autre est appelée inclusion.

Si A et B sont égaux, alors B est un sous-ensemble propre (ou strict) de A et il est noté par,

$$B \subsetneq A.$$

La relation selon laquelle un ensemble est un sous-ensemble d'un autre est appelée inclusion.

L'*ensemble vide* est noté par $\{\}$ ou $\varnothing$ et il est :

- un sous-ensemble de tout ensemble,
- un sous-ensemble propre de tout ensemble **sauf** de lui-même.

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1, 5\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 10\} \ldots \{1, 10\}$
- $\{10\} \ldots \{1, 10\}$
- $\mathbb{Z} \ldots \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,10\} \ldots \{1,10\}$
- $\{10\} \ldots \{1,10\}$
- $\mathbb{Z} \ldots \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,10\} = \{1,10\}$
- $\{10\} \ldots \{1,10\}$
- $\mathbb{Z} \ldots \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 10\} = \{1, 10\}$
- $\{10\} \subseteq \{1, 10\}$
- $\mathbb{Z} \ldots \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Méthodologie

Pour démontrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède en deux temps,

- en démontrant que A est inclus dans B,
- puis que B est inclus dans A.

Exemple

Remplir les exemples de sous-ensembles :

- $\{1,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,10\} = \{1,10\}$
- $\{10\} \subseteq \{1,10\}$
- $\mathbb{Z} \supseteq \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque

Nous pouvons utiliser le complément pour reformuler le sous-ensemble en termes d'égalité :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$$

Remarque

Nous pouvons utiliser le complément pour reformuler le sous-ensemble en termes d'égalité :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$$

Remarque

Il tient que :

$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$$

Loi distributive des ensembles

Théorème

Soit A, B et C trois ensembles. Alors,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Preuve :
L'égalité $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ est équivalent à

$$z \in A \cap (B \cup C) \text{ si-si } z \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

pour tout z. Nous allons le prouver par une chaîne de "si et seulement si".

$$\begin{aligned}
z \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (z \in A) \wedge (z \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow (z \in A) \wedge (z \in B \vee z \in C) \\
&\Leftrightarrow (z \in A \wedge z \in B) \vee (z \in A \wedge z \in C) distributivit)! \\
&\Leftrightarrow (z \in A \cap B) \vee (z \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Partition

Partition

Une partition d'un ensemble est un regroupement de ses éléments en sous-ensembles non vides, de telle sorte que chaque élément soit inclus dans exactement un sous-ensemble.

Exemple

Nous supposons que la salle il y a 7 élèves :

$$E = \{Anna, Arthur, Lea, Louis, Maria, Mohamed, Xavier\}$$

Nous pouvons faire une partition de l'ensemble E sur la base de la première lettre des noms des étudiants :
$A = \{Anna, Arthur\}$, $L = \{Lea, Louis\}$, $M = \{Maria, Mohamed\}$, $X = \{Xavier\}$

Exemple

Nous supposons que la salle il y a 7 élèves :

$$E = \{Anna, Arthur, Lea, Louis, Maria, Mohamed, Xavier\}$$

Nous pouvons faire une partition de l'ensemble E sur la base de la première lettre des noms des étudiants :
$A = \{Anna, Arthur\}$, $L = \{Lea, Louis\}$, $M = \{Maria, Mohamed\}$, $X = \{Xavier\}$

Chaque élève n'appartient qu'à un seul sous-ensemble et que l'union de tous les sous-ensembles est égale à l'ensemble lui-même.

Exemple

Nous supposons que la salle il y a 7 élèves :

$$E = \{Anna, Arthur, Lea, Louis, Maria, Mohamed, Xavier\}$$

Nous pouvons faire une partition de l'ensemble E sur la base de la première lettre des noms des étudiants :
$A = \{Anna, Arthur\}$, $L = \{Lea, Louis\}$, $M = \{Maria, Mohamed\}$, $X = \{Xavier\}$

⚠ Chaque élève n'appartient qu'à un seul sous-ensemble et que l'union de tous les sous-ensembles est égale à l'ensemble lui-même.

? Question

- Quelle est une autre partition possible de l'ensemble E ?

Exemple

Soit X un ensemble avec 5 éléments. Il y a 52 partitions de X.

Produit d'ensembles

Produit d'ensembles

Pour tout ensemble A et tout ensemble B, il existe un ensemble P dont les éléments sont tous les couples dont la première composante appartient à A et la seconde à B :

$$\forall A\ \forall B\ \exists P \quad \forall z\ \big(z \in P \Leftrightarrow \exists x\ \exists y\ \ (x \in A\ \ \wedge\ \ y \in B\ \ \wedge\ \ z = (x, y))\big)$$

Cet ensemble est noté $A \times B$ et est appelé produit cartésien de A par B.

Question

La cafétéria propose le menu suivant :

- Plat :
  - poulet basquaise,
  - paupiettes de dinde,
  - quiche lorraine.
- Accompagnement :
  - frites,
  - salade,
  - riz.

Quelles sont les différentes combinaisons de repas qui peuvent être commandées ?

Question

La cafétéria propose le menu suivant :

- Plat :
  - poulet basquaise,
  - paupiettes de dinde,
  - quiche lorraine.
- Accompagnement :
  - frites,
  - salade,
  - riz.

Quelles sont les différentes combinaisons de repas qui peuvent être commandées ?

$$\begin{aligned} M \times A \quad = \quad & \{(\text{poulet basquaise, frites}), (\text{poulet basquaise, salade}), \\ & (\text{paupiettes de dinde, frites}), (\text{paupiettes de dinde, riz}), \\ & (\text{quiche lorraine, frites}), (\text{quiche lorraine, riz}), \ldots\} \end{aligned}$$

Exemple

Soit $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{T, F\}$, *alors*

$$A \times B \times C = \{(a, 2, T), (a, 2, F), (a, 3, T), (a, 3, F), (a, 4, T), \ldots\}.$$

L'ensemble $A \times B \times C$ *a* 12 *éléments qui sont* 3*-tuples.*

Ensemble fini/infini

Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est possible de compter ses éléments. Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.

Ensemble fini/infini

Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est possible de compter ses éléments. Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.

Exemple

- *L'ensemble des chiffres en base dix* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *qui possède* 10 *éléments, est* ***fini****.*
- *L'ensemble de tous les nombres entiers naturels* $\mathbb{N}$ *est* ***infini****.*

Cardinalité

Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble est une mesure de la taille d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble, dénoté par $|A|$.

Cardinalité

Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble est une mesure de la taille d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble, dénoté par $|A|$.

Exemple

L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *a* 4 *éléments, donc il a cardinalité* 4.

Cardinalité

Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble est une mesure de la taille d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble, dénoté par $|A|$.

Exemple

L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *a* 4 *éléments, donc il a cardinalité* 4*.*

Question

Soit $B = \{n \in \mathbb{Z} : 5 \leqslant n \leqslant 5\}$. Quelle est la cardinalité de l'ensemble B ?

Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble est une mesure de la taille d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble, dénoté par $|A|$.

Exemple

L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *a* 4 *éléments, donc il a cardinalité* 4*.*

Question

Soit $B = \{n \in \mathbb{Z} : 5 \leqslant n \leqslant 5\}$. Quelle est la cardinalité de l'ensemble B ?

$B = \{-5, -4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow |B| = 11$

Définition

Deux ensembles A et B ont la même cardinalité, désignée par $|A| = |B|$, s'il existe fonction bijective (« one-to-one ») $f : A \to B$.

Bijection

Une bijection est une fonction entre les éléments de deux ensembles, où chaque élément d'un ensemble est apparié avec exactement un élément de l'autre ensemble, et vice-versa.

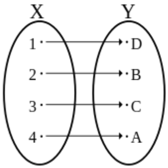

Figure – Fonction bijective

Définition

Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire qu'il est possible de compter ses éléments. Un ensemble infini est un ensemble qui n'est pas fini.

La cardinalité d'un ensemble infini est plus délicate.

Il existe de nombreuses sortes d'infinis et que certains sont plus grands que d'autres.

Dénombrable

Étant donné un ensemble A, alors A est infini de façon dénombrable si $|\mathbb{N}| = |A|$, c'est-à-dire s'il existe une bijection f entre les nombres naturels et les éléments de A.

Dénombrable

Étant donné un ensemble A, alors A est infini de façon dénombrable si $|\mathbb{N}| = |A|$, c'est-à-dire s'il existe une bijection f entre les nombres naturels et les éléments de A.

En d'autres termes, les éléments de A peuvent être énumérés dans une liste infinie $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

Dénombrable

Étant donné un ensemble A, alors A est infini de façon dénombrable si $|\mathbb{N}| = |A|$, c'est-à-dire s'il existe une bijection f entre les nombres naturels et les éléments de A.

En d'autres termes, les éléments de A peuvent être énumérés dans une liste infinie $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

Indénombrable

A est indénombrable si A est infini et si $|\mathbb{N}| < |A|$, donc il n'existe pas de telles bijections.

Dénombrable

Étant donné un ensemble A, alors A est infini de façon dénombrable si $|\mathbb{N}| = |A|$, c'est-à-dire s'il existe une bijection f entre les nombres naturels et les éléments de A.

En d'autres termes, les éléments de A peuvent être énumérés dans une liste infinie $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

Indénombrable

A est indénombrable si A est infini et si $|\mathbb{N}| < |A|$, donc il n'existe pas de telles bijections.

L'infini dénombrable est le plus petit infini.

Exemple

L'ensemble de carrés des entiers positifs est dénombrable.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 9 \\ 4 & \rightarrow & 16 \\ 5 & \rightarrow & 25 \\ & \dots & \end{array}$$

$$f(n) = n^2, \; avec \; n \in \mathbb{N}$$

Question

Est-ce que $\mathbb{Q}$ est dénombrable ?

Question

Est-ce que Q est dénombrable ?

Solution :

Nous pouvons arranger les nombres rationnels comme suit :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \dots$$

Donc, chaque nombre rationnel apparaîtra quelque part dans cette liste. Alors, il y a une bijection entre chaque nombre rationnel et sa position dans la liste (éléments de $\mathbb{N}$).

Hôtel de Hilbert

L'hôtel de Hilbert illustre une propriété paradoxale des ensembles infinis en mathématique, qui est que, contrairement à ce qui se passe pour les ensembles finis, **une partie stricte peut avoir autant d'éléments que le tout**.