Semaine 3 - Théorie des ensembles

Informatique fondamentale

présenté par

Revekka Kyriakoglou

le

05 fevrier 2024

Plan du cours

Ensemble

En mathématiques, un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets (les éléments de l'ensemble).

Ensemble

En mathématiques, un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets (les éléments de l'ensemble).

- **Ensemble :** une collection d'objets spécifiés.
- **Eléments :** les objets d'un ensemble.

Ensemble

En mathématiques, un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets (les éléments de l'ensemble).

- **Ensemble :** une collection d'objets spécifiés.
- **Eléments :** les objets d'un ensemble.

Notation

- Les éléments sont affichés entre accolades, $\{\}$.
- Nous utilisons souvent des lettres majuscules pour nommer les ensembles.

Exemple

Les exemples suivants sont des exemples d'ensembles :

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- $B = \{Anna, Emma, Lea, Maria\}$,
- $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
- $D = \{\star, \bullet, \square, \circ, \otimes\}$

Les ensembles beaucoup utilisés portent des noms :

- $\mathbb{B}$ est l'ensemble des **bits**,

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

Les ensembles beaucoup utilisés portent des noms :

- $\mathbb{B}$ est l'ensemble des **bits**,

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Les ensembles beaucoup utilisés portent des noms :

- $\mathbb{B}$ est l'ensemble des **bits**,

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Les ensembles beaucoup utilisés portent des noms :

- $\mathbb{B}$ est l'ensemble des **bits**,

$$\mathbb{B} = \{0, 1\}$$

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**,

$$\mathbb{R} = \{\text{Numbers that can represent a distance along a line.}\}$$

Notation

Les ensembles fabriqués à partir de ceux-ci sont souvent désignés par une juxtaposition de symbols, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^-$.

Attention

- Les ensembles sont non ordonnés.
- Nous ne pouvons pas avoir de doublons des éléments dans un ensemble.

Exemple

Les ensembles $A = \{1, 3, 5, 7\}$ *et* $B = \{7, 3, 1, 5\}$ *sont les mêmes.*

Exemple

Dans une salle, il y a 5 super-héros,

1. *Bruce Wayne (Batman),*
2. *Bruce Banner (Hulk),*
3. *Peter Parker (Spiderman),*
4. *Natasha Romanoff (Black Widow).*

L'ensemble de leur vrais prénoms est :

$$A = \{Bruce, Peter, Natasha\}$$

L'ensemble de leur noms (super-héros) est :

$$B = \{Batman, Hulk, Spiderman, BlackWidow\}.$$

Si le nombre d'éléments est grand ou même infini, nous essayons de décrire ces éléments.

Si le nombre d'éléments est grand ou même infini, nous essayons de décrire ces éléments.

Exemple

l'ensemble des nombres premiers peut être écrit comme suit :

$$\{x \ : \ x \text{ est un nombre premier}\}$$

à lire comme suit :

- *P est l'ensemble dont les éléments sont tous les x tels que x est un nombre premier,*
- *P est l'ensemble de tous les nombres premiers.*

Rappelez-vous :

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs.

Rappelez-vous :

- $\in$: est utilisée pour les mots « appartient à », « est un élément de ».
- $\notin$: est utilisée pour « n'appartient pas à », « n'est pas un élément de ».

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned} \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\} \\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned} \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\} \\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100,
- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5, 5]$,

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned}\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\}\\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100*,*

$$\begin{aligned}\{3,6,9,\dots,96,99\} &= \{x : x \text{ est } \dots\}\\ &=\end{aligned}$$

- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5,5]$*,*

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned} \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\} \\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100*,*

$$\begin{aligned} \{3, 6, 9, \dots, 96, 99\} &= \{x : x \text{ est } \dots\} \\ &= \{3k : k \in \mathbb{N} \wedge 3k < 100\} \end{aligned}$$

- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5, 5]$*,*

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned}\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\} &= \{x : x \text{ est un nombre pair}\}\\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100,

$$\begin{aligned}\{3,6,9,\dots,96,99\} &= \{x : x \text{ est } \dots\}\\ &= \{3k : k \in \mathbb{N} \wedge 3k < 100\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5,5]$,

$$\{\dots,-8,-6,6,8,\dots\} \quad =$$

Exemple

Les éléments suivants sont des représentations d'ensembles :

- *L'ensemble des nombres pairs,*

$$\begin{aligned}\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\} &= \{x : x \textit{ est un nombre pair}\}\\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des entiers naturels, multiples de* 3 *et inférieur à* 100,

$$\begin{aligned}\{3,6,9,\dots,96,99\} &= \{x : x \textit{ est } \dots\}\\ &= \{3k : k \in \mathbb{N} \wedge 3k < 100\}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des nombres pairs qu'ils ne sont pas dans* $[-5,5]$,

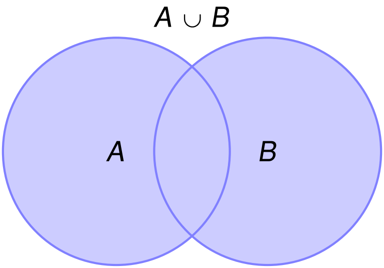
$$\begin{aligned}\{\dots,-8,-6,6,8,\dots\} &= \{x : x \textit{ est un nombre pair } \textbf{\textit{et}} \ x \textit{ not in } [-5,5]\}\\ &= \{2k : k \in \mathbb{Z} \wedge 2k \notin [-5,5]\}\end{aligned}$$

Union

Union

Quand on a deux ensembles A et B, on peut construir leur réunion (dit aussi *union*) en considérant un ensemble suivante :

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

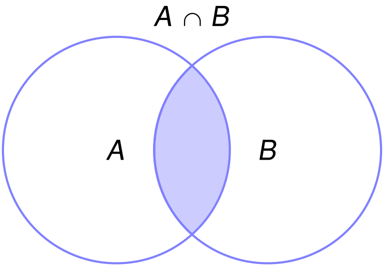


Intersection

Intersection

Quand on a deux ensembles A et B, on peut construir leur intersection en considérant un ensemble suivante :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$



Exemple

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 8, 12\}$. *L'intersection* $A \cap B$ *est l'ensemble* $\{1, 4\}$.

Exemple

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 8, 12\}$. *L'intersection* $A \cap B$ *est l'ensemble* $\{1, 4\}$.

Ensembles disjoints

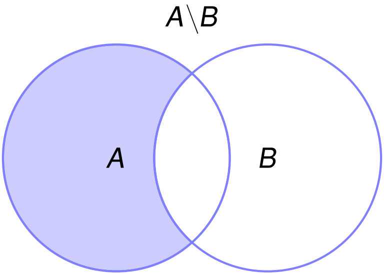
- Deux ensembles sont disjoints quand leur intersection est l'ensemble vide.
- n ensembles sont disjoints 2 à 2 quand ils sont par deux disjoint, c'est à dire $E_i \cap E_j = \{\}$ quels que soient i et j, avec $i \neq j$.

Différence

Différence

Nous pouvons aussi lister les éléments d'un ensemble A qui ne sont pas dans l'ensemble B. Cette opération s'appelle la différence entre A et B, que nous écrivons comme,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$



Exemple

Soit $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, f, g\}$. *La différence entre* A *et* B *est l'ensemble* $A \backslash B = \{a, b, d\}$ *et la différence entre* B *et* A *est l'ensemble* $B \backslash A = \{f, g\}$.

Complémentaire

Nous utilisons un nom pour le **"plus grand"** ensemble que nous sommes prêts à considérer. Si tous les ensembles que nous voulons considérer sont des sous-ensembles d'un grand ensemble $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est appelé l'ensemble universel.

Complémentaire

Nous utilisons un nom pour le **"plus grand"** ensemble que nous sommes prêts à considérer. Si tous les ensembles que nous voulons considérer sont des sous-ensembles d'un grand ensemble $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est appelé l'ensemble universel.

Différence

Le complémentaire d'une partie A d'un ensemble $\mathcal{U}$ est constitué de tous les éléments de $\mathcal{U}$ n'appartenant pas à A et s'écrit comme suit A^{C} ou $\overline{A}$.

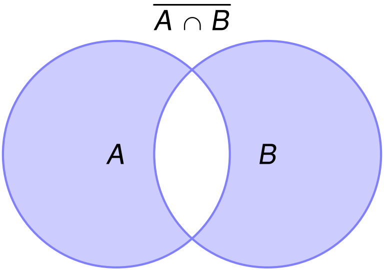
$$A^{C} = \overline{A} = \{x : x \notin A\}$$

Nous pouvons également appliquer le complément d'un ensemble qui est le resultat d'opérations sur ensembles !

⚠ Nous pouvons également appliquer le complément d'un ensemble qui est le resultat d'opérations sur ensembles !

Exemple

$$\begin{aligned} (A \cap B)^{\complement} &= \overline{A \cap B} \\ &= \{x : x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$



Remarque

Supposons-nous que $\mathcal{U}$ est l'ensemble universel. Nous pouvons vérifier que les résultats suivants sont vrais,

- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$
- $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$
- $(A^{\complement})^{\complement} = A$